I paradossi e la crisi dei fondamenti della matematica

Rosanna Zambito

21 Dicembre 2012

Introduzione

Nel corso dell'800 la matematica subì un enorme sviluppo: intorno alla metà del secolo i logici Boole e De Morgan procedettero nel codificare le forme del ragionamento deduttivo, Frege a Jena e Peano a Torino lavoravano per abbinare il ragionamento formale allo studio degli insiemi e dei numeri, Hilbert a Gottinga elaborò una formalizzazione della geometria rigorosa; la scoperta delle geometrie non-euclidee inoltre scosse la collettività matematica, poiché metteva seriamente in dubbio l'idea secondo cui la geometria studiava il mondo reale. Nel frattempo si ebbero sviluppi molto interessanti nella matematica classica, grazie alla teoria degli insiemi di Cantor.
In breve tempo vennero alla luce tutta una serie di paradossi insiemistici, che coinvolgevano, di conseguenza, la teoria di Cantor e tutte le sue applicazioni. Il più famoso di questi paradossi fu certamente quello di Russell, che era solo il primo dei tanti che ne seguirono! Si cominciò così a scavare più in profondità nella teoria degli insiemi. La questione fondamentale sembrava essere: si può trovare un modo per salvare la matematica e metterla al riparo dai paradossi?

I paradossi

Con il termine *paradosso*, dal greco $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$(contro) e $\delta\acute{o}\xi\alpha$ (opinione), si vuole indicare qualcosa di contrario alla verosimiglianza e al senso comune; una conclusione di un ragionamento corretto che sia smentita dall'evidenza o dall'esperienza.
Dal punto di vista più generale o letterario i paradossi sono affermazioni che sorprendono l'uditore (e non ha importanza la loro falsità o veridicità); nel campo scientifico e quindi matematico si presentano come affermazioni che, per il loro contenuto o per il modo in cui sono espresse, apparentemente contraddicono i principi elementari della logica, ma risultano, in realtà, del tutto valide e fondate sottoposte ad un esame critico e rigoroso. Nel corso del tempo l'idea di paradosso e di ciò che rappresenta è cambiata. Il significato del termine, dipende dai tre periodi storici in cui il paradosso ha avuto grande considerazione ed è insito nel nome con cui veniva chiamato.
Per i Greci il paradosso era *paralogismo* cioè puro e semplice errore di ragionamento; nel Medioevo divenne *insolubilia* ossia problemi senza una soluzione, dilemma inspiegabile e tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi del Novecento fu considerato come un'affermazione incredibile, una credenza contraria all'intuizione comune ed era un'*antinomia*.
Il paradosso, è fonte di nuove idee: suggerisce infatti cambiamenti. Se pensiamo ad esempio al paradosso di Zenone, siamo tutti daccordo nell'affermare che ha certamente contribuito alla maggior parte dei progressi della matematica moderna ossia alla realizzazione di gran parte del processo di formalizzazione della matematica avvenuto tra la metà dell'Ottocento e i primi del Novecento.
Opportunamente riveduti e affinati, rappresentarono dunque lo strumento usato dai matematici per dimostrare teoremi che altrimenti sarebbero rimasti inaccessibili. La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato, scoperta che aveva messo in crisi la visione pitagorica, cessò di essere un paradosso solo quando fu introdotto il concetto di numero razionale e poi il concetto di numero reale.

Esempi e classificazioni

Vediamo alcuni esempi di paradossi molto conosciuti. Si ritiene che il più antico paradosso conosciuto sia quello di Epimenide di Creta, vissuto nel VI secolo a.C., (uno dei sette sapienti dell'antichità).
Egli afferma: "Tutti i cretesi sono bugiardi".
Essendo Epimenide stesso un cretese, diceva la verità o mentiva? La frase

risulta paradossale: se questa fosse stata una bugia, egli avrebbe in realtà detto la verità; viceversa, se fosse stata la verità, allora egli avrebbe mentito. Ciascuna delle due possibilità portava dunque ad una contraddizione.
Secondo la logica moderna tuttavia questo non è un vero paradosso, in quanto non ci troviamo in un caso in cui valgono contemporaneamente una proposizione P e anche la sua negazione: la negazione di "tutti i cretesi sono bugiardi" è "esiste almeno un cretese che non è bugiardo", non "tutti i cretesi sono sinceri" (infatti la negazione di "$\forall x$, x verifica P" è "$\exists$ almeno un x che non verifica P ", non "$\forall x$, x verifica $\neg$ P"). La frase "tutti i cretesi sono bugiardi" non può essere vera altrimenti Epimenide stesso sarebbe un cretese che a volte dice il falso. Dunque la fase deve essere falsa, cioè qualche cretese deve dire a volte qualche verità e la cosa quindi finisce qui. Non è detto che quel cretese debba proprio essere Epimenide e anche se lo fosse, non è detto che quella verità debba essere proprio la frase in questione.

Successivi di un paio di secoli ma molto più famosi sono poi i paradossi di Zenone di Elea (489 a.C.-431 a.C.), di cui abbiamo testimonianza grazie alla citazione nell'opera *Fisica* di Aristotele. Lo scopo di Zenone è sostenere l'idea del suo maestro Parmenide, secondo cui la realtà è costituita da un essere unico e immutabile. Per fare questo elabora dei paradossi contro il pluralismo e il movimento, il più celebre dei quali è il paradosso della freccia: "*Essa appare in movimento ma, in realtà, è immobile: in ogni istante difatti occuperà solo uno spazio che è pari ella sua lunghezza; e poiché il tempo in cui la freccia si muove è fatto di infiniti istanti, essa sarà immobile in ognuno di essi*".
Come possono la freccia ferma e quella in movimento essere la stessa? Come si possono distinguere in modo da smentire il paradosso? Oggi sappiamo che per la teoria della relatività ristretta, le due frecce sono diverse, perché quella che è in movimento rispetto all'osservatore appare a questo più corta.

Esistono molti tipi di paradossi, che possiamo classificare in tanti modi. Se consideriamo infatti, le nostre esperienze sensoriali abbiamo paradossi tattili, gustativi, olfattivi, uditivi, visivi, che vengono solitamente chiamati *ambiguità* o *anomalie*. Abbiamo poi i paradossi logici e matematici. Secondo P. Odifreddi, possiamo classificare quest'ultimo tipo in base a premesse, ragionamento e conclusione, ottenendo così questa suddivisione:
- paradossi *logici* o *negativi*, in cui si intende rifiutare le premesse mediante una riduzione all'assurdo (questo tipo di paradossi è molto importante, perché permette di accorgersi che certe assunzioni non sono in realtà accettabili);
- paradossi *retorici* o *nulli*, utilizzati al solo scopo di esibire la sottigliezza

del ragionamento o l'abilità di chi lo fa;
- paradossi *ontologici* o *positivi*, che attraverso un ragionamento inusuale servono a rafforzare la conclusione a cui si arriva.
Un altro tipo di classificazione viene elaborata dal filosofo e matematico inglese F. P. Ramsey (1903-1930), secondo cui le antinomie sono di due tipi:
- *antinomie logiche*;
- *antinomie semantiche* o *linguistiche*, che, a differenza di quelle logiche, coinvolgono concetti di verità e definibilità.
Ramsey afferma inoltre che per evitare le antinomie logiche in matematica sembra essere necessaria una revisione critica dei concetti coinvolti; mentre i paradossi semantici non vanno nemmeno considerati: essi infatti non sono riproducibili in matematica, in quanto dovuti semplicemente a formulazioni linguistiche scorrette. Chiaramente, il fatto che i paradossi semantici non appaiano direttamente non significa che non possano farlo indirettamente: non è escluso che in qualche modo si possa passare da concetti semantici a concetti logici, e quindi da paradossi semantici a enunciati paradossali in matematica.
Fortunatamente però la teoria semantica di Tarski (1902-1983) ci fornisce un metodo per evitare i paradossi linguistici: secondo questa teoria nessun linguaggio consistente può contenere al suo interno i mezzi per parlare del significato o delle verità delle sue stesse espressioni. I paradossi semantici nascono perché cerchiamo di esprimere in un linguaggio ł il concetto di "essere veri in ł": per eliminare il paradosso dobbiamo allora esprimere il concetto di "essere veri in ł" utilizzando un linguaggio diverso , che viene chiamato *metalinguaggio*. Se dunque non c'è una generale "ricetta" per eliminare le antinomie in matematica, *almeno* non dobbiamo più preoccuparci di quelle linguistiche, ma solo di quelle logiche.

Vediamo, a questo punto, alcuni esempi di paradossi linguistici (per quanto riguarda gli esempi di antinomie logiche, avremo modo di vederne all'interno della teoria di Cantor).
Il paradosso di Richard è stato proposto dal matematico francese J. A. Richard (1862-1956) nel 1905.Possiamo illustrarlo così:
consideriamo un vocabolario, il quale sarà costituito da un numero esteso (ma ovviamente finito) di parole e di segni. Consideriamo allora quelle frasi, costruite mediante tali parole e segni, che ci permettono di definire univocamente dei numeri reali, ad esempio "il numero il cui quadrato è due", composta da 7 parole, oppure "il numero dato dal rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro del medesimo cerchio", composta da 17 parole. Chiamiamo allora R_n l'insieme dei numeri reali che possiamo definire tramite n parole e segni del nostro vocabolario. Certamente R_n è un

insieme finito, qualsiasi sia l'intero n, quindi l'insieme:

$$\mathrm{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_n \ ,$$

costituito da tutti e soli quei numeri reali definibili con un numero finito di elementi del nostro vocabolario, risulta essere numerabile; perciò è possibile ordinarne gli elementi nella successione $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Ogni elemento di questa successione può essere scritto nella maniera:

$$r_t = [r_t].r_{t_1} r_{t_2} r_{t_3} r_{t_4} \ldots \qquad \text{dove } [r_t] \text{ rappresenta la parte intera di } r_t.$$

Consideriamo ora il numero $\bar{r} = 0.\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4 \ldots$ così definito:

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_{i_i} + 1 & \text{se } r_{i_i} \neq 9 \ ; \\ 0 & \text{se } r_{i_i} = 9 \ . \end{cases}$$

Esso è: il numero la cui parte intera è zero, mentre (per ogni i) il suo i-esimo decimale è ottenuto aumentando di uno l'i-esimo decimale del numero r_i appartenente ad ˚ (con l'avvertenza che se tale decimale fosse 9, non si pone dieci ma zero).
Da un lato, possiamo vedere dalla frase sopra riportata che $\bar{r}$ è un numero reale definibile con una quantità finita di parole o segni del nostro vocabolario e quindi deve essere un elemento di ˚; dall'altro lato, per il modo in cui è costruito, è diverso da tutti i numeri reali contenuti in ˚ e quindi non può appartenervi!

Una variante del paradosso di Richard è il paradosso di Berry (dal nome del bibliotecario G. G. Berry (1867-1928) che l'ha proposto), in cui questa volta: "$\bar{r}$ è il più piccolo numero naturale che non può definirsi usando meno di 19 parole del vocabolario". Chiaramente il problema è ben posto, perché i numeri naturali sono infiniti, mentre il numero delle parole del vocabolario è finito; quindi certamente ci saranno alcuni numeri che non possono essere definiti con meno di un numero arbitrario fissato di parole del vocabolario. Inoltre, dato che l'insieme dei naturali è ben ordinato, si può scegliere il minimo elemento di tali numeri. Dunque siamo nuovamente di fronte ad un paradosso, perché la frase che definisce $\bar{r}$ è formata da 18 parole!

L'ultimo esempio di paradosso semantico che riportiamo è il paradosso dell'eterologicità, riportati per la prima volta dal matematico K. Grelling (1886-1942). Definiamo *autologici* gli aggettivi che sono veri in se stessi, che possono riferirsi a se stessi; viceversa chiamiamo *eterologici* gli aggettivi che non possono riferirsi a se stessi. Il paradosso nasce dalla domanda: "eterologico" è un aggettivo eterologico o autologico? Se supponiamo che non si riferisca a se stesso allora è eterologico, quindi si riferisce a se stesso; se supponiamo che si riferisca a se stesso allora è autologico e quindi non si riferisce a se stesso; dunque è eterologico se e solo se è autologico!

La crisi dei fondamenti della matematica

"Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso
che Cantor ha creato per noi."
(David Hilbert)

La scoperta delle antinomie

Con "crisi dei fondamenti della matematica" si vuole indicare l'ampio dibattito che ha coinvolto la comunità dei matematici e dei filosofi nel primo trentennio del XX secolo. Tale dibattito era incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina. In seguito al grande impulso ricevuto dalla formalizzazione nel corso dell'800 grazie al lavoro di matematici come Boole (1815-1864), Peano (1858-1932), Dedekind (1831-1916), tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, un nutrito gruppo di studiosi si impegnò nel tentativo di dare una rigorosa fondazione logica ai contenuti delle proposizioni matematiche, con l'obiettivo di produrre una giustificazione assoluta della loro validità. In ciò fu importante soprattutto il lavoro di Frege (1848-1925). Tuttavia l'insorgenza di difficoltà inaspettate (in particolare una serie di paradossi portati alle loro estreme conseguenze da Godel (1906-1978) nel 1931), finì per dimostrare l'incompletezza di tutta la matematica.
Fondamentali per capire quali siano le radici storiche della crisi sono i cambiamenti profondi che la matematica ha subito nell'arco del XIX secolo, a tal proposito ripercorriamo velocemente le tappe del lungo processso che ha portato alla costruzione della moderna teoria degli insiemi ed esaminiamo quali problemi sono via via stati sollevati.
Verso la metà dell'800, con l'operato di Boole, la logica fu matematizzata (cioè furono espresse le leggi logiche, fino ad allora date in modo discorsivo, in forma di calcolo) e nacque la logica matematica.
Nel frattempo c'era stata la scoperta delle geometrie non euclidee che portò a due conseguenze: da un lato si sviluppò un grande interesse per i sistemi assiomatici, quindi in definitiva per la logica; dall'altro si generò una sorta di

impulso irrefrenabile alla libertà creativa e alla non accettazione dei vecchi modelli, che causò la messa in discussione di tutta la matematica classica.
Queste però non erano le uniche novità: erano nate l'analisi moderna e la teoria degli insiemi, si erano verificate l'aritmetizzazione dell'analisi, la logicizzazione dell'aritmetica e la formalizzazione della geometria.
Alla fine dell'800 nasce la teoria degli insiemi per opera di Cantor che culmina nella teoria dei numeri cardinali e ordinali, nel concetto di buon ordinamento di un insieme (teorema insiemi ben ordinati).
Il problema aperto era: esiste un buon ordinamento per il continuo? (secondo problema dei 23 proposti da Hilbert). Cantor aveva cercato di stabilire come i punti della retta o i numeri reali si potessero ordinare in modo che ogni loro sottoinsieme avesse sempre un primo elemento. Non riuscì ad ottenere nessun risultato.
Nel 1904 Ernst Zermelo pubblica una dimostrazione in cui si enunciava la possibilità di ben ordinare ogni insieme. La risposta affermativa di Zermelo al problema del buon ordinamento fu però oggetto di aspre recensioni: per esempio, un tentativo fallito di critica al lavoro di Zermelo si ebbe al congresso internazionale dei matematici di quell'anno quando Konig dimostrò, sbagliando (aveva mal interpretato quanto presentato da Zermelo), con un controesempio che il continuo non era un'insieme ben ordinato.
In questo contesto, si inseriva Frege (1848-1925) che aveva cominciato ad elaborare il proprio programma di ricerca sui fondamenti della matematica. In questa sua indagine, si imbattè nell'inadeguatezza del linguaggio usato per le dimostrazioni matematiche e inizio lo sviluppo di un linguaggio e di una logica formale.
Secondo Frege, i tentativi messi in atto dai vari matematici non avevano raggiunto lo scopo di introdurre i numeri irrazionali per via puramente logica per la scarsa osservanza del rigore che la logica invece richiede nel dare le definizioni. Frege sfuggì a tali errori con un procedimento diretto a introdurre i numeri reali come rapporti di grandezza. In tal modo, come osserva in una lettera inviata a Russell nel maggio 1903, giungeva in un sol passo dai numeri naturali ai reali evitando di passare attraverso i razionali.
Nel 1893 pubblica il primo volume dell'opera *Grudgesetze der Arithmetik* (Fondamenti dell'aritmetica) in cui presentava il proprio programma assiomatico. L'opera rielaborava tutta la matematica partendo dal concetto di insieme, utilizzava un insieme di proncipi basilari ed esprimeva il tutto in un linguaggio formale.
Dieci anni dopo, nel 1903, usciva il secondo volume dell'opera in cui Frege trattava la teoria dei numeri reali su basi puramente logiche. Egli definisce un numero cardinale di una classe, finita o infinita, come *le classi di tutte le classi i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con*

quelli della classe data. Da questa definizione, deriva tutte le proprietà dei numeri interi. In base a tale definizione, i normali numeri interi positivi che nessun aveva mai immaginato di dover definire tanto congenita sembrava la loro nozione, per Frege sono *classi di classi.*

In *Storia della Filosofia Occidentale* Russell dice:

> *"Prima di Frege ogni definizione di numero che era stata suggerita conteneva elementari errori logici. Rientrava ormai nell'abitudine identificare numero con pluralità. Ma un esempio di numero, è un determinato numero, diciamo 3, mentre un esempio di 3 è un determinato terzetto. Il terzetto è una pluralità, ma la classe di tutti i terzetti, che Frege identifica col numero 3, è una pluralità di pluralità. L'elementare errore grammaticale di confondere questo con lapluralità semplice d'un dato terzetto fece si che tutta la filosofia del numero prima di Frege, fosse un tessuto di assurdità"*

In parole povere, il numero 3 per Frege vuol dire la classe di tutti i terzetti! Il salto all'astrazione è notevole, riesce a fondere logica matematica e teoria degl insiemi.
In definitiva, negli ultimi anni del XIX secolo, le sorti dell'intera matematica erano ridotte alle sorti dei sistemi assiomatici formali: e se questi ultimi si fossero rivelati contraddittori?
Il *Paradiso Insiemistico* (per citare Hilbert!) creato da Cantor si rivelò infondato in soli due decenni. Prima timidamente Cantor stesso, poi gli italiani che tra i primi avevano recepito le sue idee, poi Russell e altri, intorno al 1900 si rendono conto di alcune gravi difficoltà: le cosidette antinomie (o paradossi). Si trattava di vere e proprie contraddizioni interne alla teoria degli insiemi di Cantor, la più famosa delle quali è di Russell.
La comparsa dei paradossi rende necessario il bisogno di una solida fondazione della matematica. Se nell'800 la ricerca sui fondamenti era vista sostanzialmente come sistemazione rigorosa di conoscenze e risultati non discussi,nei primi anni del '900 è considerata un mezzo necessario per evitare una vera e propria sconfitta.
É la cosiddetta crisi dei fondamenti: si tratta di conciliare l'indiscussa utilità della teoria degli insiemi con la sua non contraddittorietà e quindi affidabilità.
L'episodio che aprì ufficialmente la crisi dei fondamenti fu la lettera che Russel (1872-1970) inviò a Frege nel 1902: proprio mentre quest'ultimo stava

ultimando la stampa del secondo volume della sua opera *Fondamenti dell'aritmetica*, Russell lo informò di un'antinomia che riguardava in particolare il V assioma, ed era radicata nei fondamenti della teoria degli insiemi. Entusiasmatosi per i lavori di Peano seguiti al congresso di Parigi del 1900, Russell aveva cominciato la redazione dei *Principles of mathematics* e, nel passare in rassegna la letteratura più recente e rilevante per il suo argomento, aveva intrapreso uno studio approfondito dei *Fondamenti* di Frege. Nel corso di tale studio, probabilmente nel 1901, formulò il suo celebre paradosso, che poi rivelò a Frege. Questi ne diede notizia in una nota finale, (inserita nell'appendice del volume) dicendo: *"A uno scrittore di scienze ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione"*. E di certo non era di consolazione che chiunque nelle sue dimostrazioni avesse fatto uso di estensioni di concetti, di classi, di insiemi si trovasse nella sua stessa posizione: *"Qui non è in causa il mio metodo di fondazione in particolare, ma la possibilità di una fondazione logica dell'aritmetica in generale"*.
L'antinomia di Russell, prima che venisse resa nota da Frege, era stata scoperta anche da Zermelo (1871-1953) e discussa negli ambienti di Gottinga. Dopo la lettera di Russell, lo stesso Hilbert (1862-1943) scrisse a Frege, aggiungendo che egli aveva trovato altre e più convincenti contraddizioni già 4 o 5 anni prima.
Per quanto già noti in ristretti circoli matematici, le antinomie e i paradossi presenti nella teoria degli insiemi e nel sistema di Frege cominciarono ad essere apertamente discussi in tutte le loro implicazioni solo dopo la pubblicazione dell'opera di Russell, *The Principles of Mathematics*, nel quale il logico inglese presentava la sua antinomia.

I paradossi della teoria di Cantor

La teoria degli insiemi fu sviluppata da Cantor tra il 1874 e il 1884: tra i molti risultati ottenuti, troviamo la definizione di cardinalità di un insieme finito e di potenza di un insieme infinito e lo sviluppo dell'aritmetica transfinita, che rivoluzionò del tutto la nozione matematica di infinito. Le sue idee non furono subito accettate di buon grado: tra le molte critiche le più profonde giunsero da Kronecker. Solo qualche anno dopo, però, la teoria degli insiemi risultava quasi universalmente accettata e utilizzata in ogni campo della matematica (ad esempio da Dedekind, Frege, Peano per la costruzione dei naturali o più tardi, agli inizi del '900, da Lebesgue per la teoria della misura): era ormai diventata patrimonio comune.

La teoria degli insiemi difettava tuttavia proprio nelle definizioni di partenza. A questo proposito Cantor affermava che: *"ogni insieme è la raccolta in una totalità di oggetti determinati, ben distinti tra di loro, della nostra intuizione o del nostro pensiero"*. Dunque, oltre a non dire nulla di preciso su cosa siano queste *raccolte*, la definizione di insieme, così come quelle di ordinale e cardinale, fa chiaro riferimento all'intuizione. Proprio la natura intuitiva del concetto di insieme andrà a cozzare, a causa delle antinomie che emergeranno all'inizio del '900, con le pretese di una matematica antiintuitiva.

Come abbiamo già visto, nel 1902 Russell sconvolse tutto l'ambiente matematico con la sua antinomia, che riguardava il principio di comprensione e la logica elementare. Il principio di comprensione era quello usato da Cantor per definire gli insiemi, secondo il quale ad ogni proprietà P corrisponde un insieme E ben determinato, formato da tutti gli elementi che soddisfano P. Sia

$$\mathcal{R} = \{X \mid X \notin X\}$$

per tale principio è un insieme, quindi:
X $\in$ R se e solo se X $\notin$ R che per X = R dà R $\in$ R se e solo se R $\notin$ R
e questa deduzione va contro il principio di non contraddizione.
In altri termini: chi rade il barbiere di un villaggio in cui tutti gli uomini che non si radono da soli, vanno dal barbiere?
Questa formulazione alternatica del paradosso di Russell risulta, contrariamente all'originale sugli insiemi, facilmente risolvibile pensando ad un barbiere donna o negando l'esistenza di un villaggio simile!
Il paradosso di Russell era però solamente una delle tante contraddizioni che cominciavano ad affiorare nella teoria degli insiemi; già nell'ultimo decennio dell'800 lo stesso Cantor si era reso conto che c'erano alcune contraddizioni all'interno della sua teoria.
Una di queste è il paradosso di Cantor, o paradosso del massimo cardinale, che può essere formulato in questo modo: sia ϵ l'insieme di tutti gli insiemi e $P(\epsilon)$ il suo insieme delle parti. Allora, per un teorema dimostrato da Cantor, $card\epsilon < card\ P(\epsilon)$. Inoltre, $P(\epsilon) \subset \epsilon$, perché gli elementi di $P(\epsilon)$ sono insiemi (e ϵ è l'insieme di tutti gli insiemi), dunque $card\epsilon \geq cardP(\epsilon)$, da cui la contraddizione. Questo significa che un tale insieme ϵ non può esistere.
L'ultima delle antinomie logiche della teoria di Cantor che vedremo è il paradosso di Burali-Forti, o paradosso del massimo ordinale. Supponiamo infatti che esista Ω, l'insieme di tutti gli ordinali α. Allora Ω sarebbe ancora un ordinale, quindi esisterebbe il suo successore $\Omega + 1$, che quindi verificherebbe $\Omega + 1 > \Omega$. Ma essendo $\Omega + 1$ ancora un ordinale, allora $\Omega + 1 \in \Omega$, quindi

avremmo $\Omega + 1 \leq \Omega$, da cui l'assurdità: $\Omega + 1 \leq \Omega < \Omega + 1$. Di conseguenza, l'insieme di tutti gli ordinali non può esistere.

Le reazioni alla scoperta delle antinomie e la fine della crisi

La storia della matematica dal 1902 agli anni Trenta coincide con la storia dei tentativi fatti di eliminare i paradossi e, più in generale, di dare dei fondamenti solidi alla matematica. Antinomie e paradossi sembravano spuntare ovunque: era stato introdotto il paradosso di Berry, che sembrava fin troppo vicino a quello di Russell, erano nati nuovi paradossi di tipo linguistico come quello di Richard (e sue varianti, tra cui una elaborata da Konig).

Dopo la lettera di Russell e la scoperta dei paradossi, vi furono diverse reazioni: Frege rinunciò a intervenire nel dibattito sui fondamenti della matematica, abbandonando di fatto la ricerca logica attiva; Dedekind, la cui costruzione dell'aritmetica era stata altrettanto colpita dal paradosso di Russell, fu altrettanto rinunciatario. Da parte di alcuni vi fu una tendenza istintiva a rifiutare ogni fondazione logica della matematica (il più autorevole rappresentante di questo movimento "antilogicista" fu Poincaré (1854-1912)); Cantor invece riteneva che nella sostanza il paradosso di Russell fosse riconducibile ad un tipo di paradossi che egli stesso da tempo aveva trovato (e comunicato per lettera a Dedekind e Hilbert) relativi a molteplicità come la classe di tutti i cardinali, classi troppo grandi, che non potevano essere pensate come insiemi. Egli quindi distingue tra "molteplicità inconsistenti" e "consistenti", cioè tra quelle esistenti solo come molteplicità, troppo grandi per essere considerate come oggetti, e quelle del genere oggetto, delle quali cioè potevano predicarsi delle proprietà; tale soluzione significava, implicitamente, una limitazione del principio di comprensione.

Il paradosso di Russell, pur non paralizzando in senso stretto l'attività dei matematici, che in realtà non si trovavano a dover lavorare con insiemi così grandi, fu un durissimo colpo per il fondamento logico che si stava cercando di dare alla matematica da Boole in poi: veniva messa in crisi la possibilità di definire in maniera assoluta i concetti matematici fondamentali. Era chiara dunque la necessità di una revisione dei fondamenti della matematica allo scopo di eliminare i paradossi.

Nacquero così varie posizioni fondazionaliste, che si fanno di solito rientrare in una delle tre scuole di filosofia matematica che sorsero all'inizio del secolo: il Logicismo di Russell, il Formalismo di Hilbert e l'Intuizionismo di Brouwer (1881-1966); inoltre ci fu un ulteriore tentativo di revisione della teoria degli insiemi (oltre a quella di Russell) da parte di Zermelo.

Il primo a credere nel metodo assiomatico come mezzo per eliminare le antinomie dalla teoria degli insiemi fu il tedesco Hilbert, convinto che le gravi difficoltà insorgessero qualora si avesse a che fare con gli insiemi infiniti; Hilbert propose, per evitare il sorgere di contraddizioni, di unificare metodo assiomatico e logica simbolica e di studiare la matematica dopo averla completamente assiomatizzata e formalizzata. In tal modo una qualunque dimostrazione doveva essere assolutamente chiara e rigorosa.
In collaborazione con Whitehead (1861-1947) Russell elaborò un nuovo sistema logico in grado di evitare il possibile sorgere di contraddizioni e di ricostruire l'intero edificio matematico a partire da un numero ristretto di assiomi. In particolare, essi proposero l'introduzione del concetto di ordine, che comportava una complessa stratificazione dell'universo in tipi, da cui il termine *teoria dei tipi*.
Gli intuizionisti, le cui posizioni erano state anticipate da Poincaré, sostenevano l'impossibilità di fondare su basi logiche la matematica, poiché nella loro interpretazione questa è un'attività costruttiva, e dunque precede la logica, che invece è un'attività descrittiva. Per questo motivo la matematica non è realmente messa in crisi da alcun paradosso logico. Anche l'intuizionismo, in ogni caso, aveva dei difetti: oltre alla sostanziale rinuncia a ogni tipo di fondazione, infatti, gli intuizionisti erano costretti a rifiutare il principio del terzo escluso.
Zermelo, allievo di Hilbert, diede una rigorosa impostazione assiomatica alla teoria degli insiemi: cercò di riformulare la teoria di Cantor in termini non contraddittori, ricorrendo ad un efficace sistema di assiomi, poiché a suo avviso il sorgere di paradossi poteva derivare da un'insufficiente definizione del concetto d'insieme. Cercò inoltre di indebolire il principio di comprensione, che nel suo sistema divenne il *principio di separazione* (o *di isolamento*), che però permetteva di dimostrare soltanto l'esistenza dell'insieme vuoto e si limitava a generare nuovi insiemi a partire da insiemi già dati. La teoria di Zermelo si basava su 7 assiomi, che erano sufficienti per ottenere tutti i risultati importanti della teoria degli insiemi e non creavano nessuna delle antinomie conosciute. La sua teoria fu quindi concepita come una teoria matematica e non come una teoria logica, come invece quella di Russell. Nonostante ciò, la sua teoria si dimostrò troppo debole, non sufficiente, cioè, a garantire una completa revisione della teoria di Cantor: lasciava aperti i problemi dell'indipendenza e della coerenza degli assiomi.
Queste e altre debolezze teoriche rilevate nel sistema di Zermelo furono superate, all'inizio degli anni Venti, dal norvegese Skolem (1887-1963); qualche anno dopo, anche Fraenkel (1888-1970) riprese i risultati di Zermelo, li perfezionò e propose un sistema assiomatico, noto come teoria di Zermelo-Fraenkel.

Alla fine degli anni venti, il dibattito era diventato leggermente più statico: il Logicismo di Russell fu, delle tre, la dottrina meno seguita; l'Intuizionismo di Brouwer attecchì solo su un gruppo ristretto di studiosi; il Formalismo di Hilbert, fu di fatto considerato vincente. Perché il trionfo fosse definitivo era però necessaria la fatidica dimostrazione di coerenza e di completezza di un sistema assiomatico formale che potesse esprimere l'aritmetica.

All'inizio degli anni trenta, il giovanissimo Godel arrivò a dei risultati che misero fine alla speranza di ottenere una tale dimostrazione, e quindi alla possibilità di avere una matematica che si autogiustificasse. Di fatto qui si concluse la crisi dei fondamenti: anche se il dibattito continuò per molti anni ancora, esso andò via via scemando.

Bibliografia

[1] Bell, Eric T., *I grandi matematici*, Biblioteca Universale Sansoni.

[2] Bottazzini, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet Libreria.

[3] Falletta, Nicholas, *Il libro dei paradossi*, Longanesi & C.

[4] Odifreddi, Piergiorgio, *Tempi (e luoghi) dei paradossi*.

[5] Relazioni degli anni precedenti